Nom:	groupe	
Prénom		

Exercice 1 Parmi 25 patients en consultation, 20 ont déclaré être satisfaits de leurs soins.
Tester si la proportion de satisfaits est généralement supérieure à 0.6 et calculer la puissance $\eta(\frac{20}{25})$.

- Hypothèses

  (H_0) La proportion de satisfaits est égale à 0.6.

  (H_1) La proportion de satisfait est supérieure à 0.6.

- Modèle statistique

  Soit X la variable aléatoire égale au nombre de patients satisfaits. X suit une loi binomiale $\mathcal{B}(25, 0.6)$.

- Risque d'erreur $\alpha = 0.05$

- Région de rejet

$$\mathbb{P}(X = k) = \left(\begin{array}{c} 25 \\ k \end{array} \right) 0.6^k \, 0.4^{n-k}$$

$$\begin{array}{lll} \mathbb{P}(X \geq 25) = 0.000003, & \mathbb{P}(X \geq 22) = 0.0024, & \mathbb{P}(X \geq 20) = 0.0294, \\ \mathbb{P}(X \geq 24) = 0.00005, & \mathbb{P}(X \geq 21) = 0.0095, & \mathbb{P}(X \geq 20) = 0.0735, \\ \mathbb{P}(X \geq 23) = 0.0004, & & \end{array}$$

  donc

$$K_{0.05} = \{20; 21; 22; 23; 24; 25\}$$

- Décision

  On a $X^{exp} = 20 \in K_{0.05}$.

  On rejette (H_0) et on accepte (H_1). Avec une erreur $\alpha = 0.05$, on peut dire que la proportion de satisfaits est généralement supérieure à 0.6.

- Signification (p-value)

$$p = \mathbb{P}(X \geq 20) = 0.0294$$

- Puissance

$$\eta\left(\frac{20}{25}\right) = \sum_{k=20}^{2} 5 \left(\begin{array}{c} 25 \\ k \end{array} \right) 0.8^k \, 0.2^{n-k} = 0.6167$$

Exercice 2 Dans une expérience étudiant la mémoire à court terme, des expérimentateurs ont présenté une liste de 10 mots pendant une minute à un groupe d'individus. Cinq secondes après la lecture de la liste, les sujets devaient rappeler le plus rapidement possible la liste de mots. Parmi 200 étudiants, 48 ont mis moins de 25 secondes.

Tester si la proportion des scores inférieurs à 25 secondes est inférieure à 30% et calculer $\eta(0,24)$.

- Hypothèses

  (H_0) La proportion de scores inférieurs à 25 secondes est égale à 30%. ($p = 0.3$)

  (H_1) La proportion de scores inférieurs à 25 secondes est inférieure à 30%. ($p < 0.3$)

- Modèle statistique

  Soit P_n la proportion aléatoire égale à la proportion de scores inférieures à 25 secondes.

  Pour $n = 200$ et $p = 0.3$, $n > 30$, $np > 5$ et $n(1-p) > 5$, on peut approcher P_{200} par une loi normale.

$$P_{200} \sim \mathcal{N}(0.3; \sqrt{\frac{0.3 \times 0.7}{200}}) = \mathcal{N}(0.3, 0.0324)$$

  Alors la variable aléatoire Z définie par

$$Z = \frac{P_{200} - 0.3}{0.0324}$$

  suit une loi normale centrée-réduite $\mathcal{N}(0,1)$.

- Risque d'erreur $\alpha = 0.05$ (test unilatéral inférieur).

- Région de rejet

$$\begin{array}{ll} z_\alpha = -1.645 & p_\alpha = -1.645 \times 0.0324 + 0.3 = 0.2467 \\ K_{0.05}[Z] = [Z < -1.645] & K_{0.05}[P_{200}] = [P_{200} < 0.2467] \end{array}$$

- Décision

$$P^{exp} = \frac{48}{200} = 0.24 \in K_{0.05}[P_{200}]$$

  On rejette (H_0). On peut dire que la proportion des scores inférieurs à 25 secondes est inférieure à 30%.

- Signification

$$p = \mathbb{P}(P_{200} < 0.24) \simeq \mathbb{P}(Z < -1.85) \simeq 0.5 - \phi(1.85) = 0.5 - 0.4678 \simeq 0.0322$$

- Puissance $\eta(0.24)$

$$\eta(0.24) = \mathbb{P}(P_{200} < 0.2467 | p = 0.24) \simeq \mathbb{P}(Z < 0.22) \simeq 0.5 + \phi(0.22) = 0.5871$$